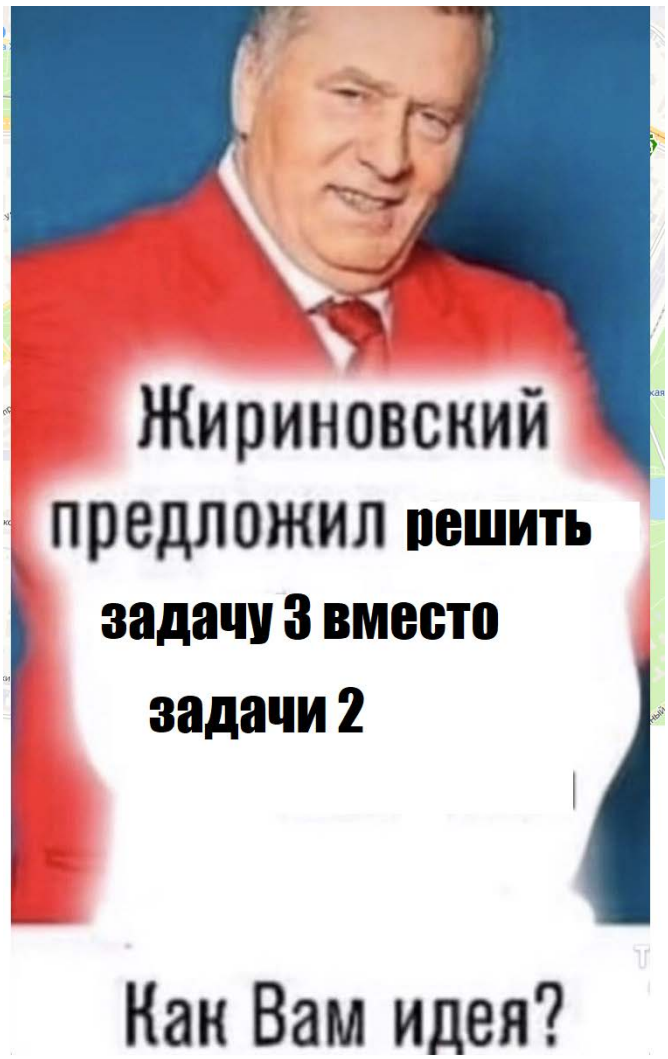
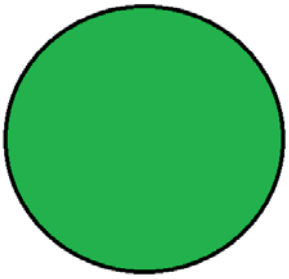
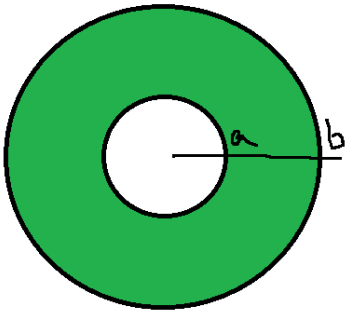
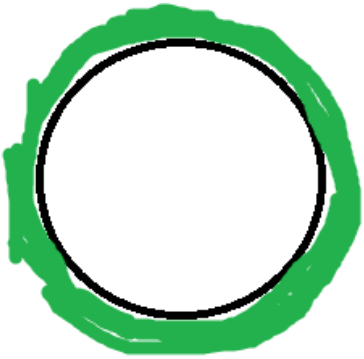


Ну что же, а теперь давайте решать задачу 3.
Приятная новость: здесь не будет функций Бесселя и Неймана. Неприятная: как я обещал, здесь будет веселуха с подбором A_n и B_n.

Некоторые общие замечания к задачам 3. Решение задачи 2 начинается со слов «будем искать решение в виде X(x)Y(y)Z(z), R(r)Z(z)Φ(φ)». И действительно, СФ зачастую имеют именно такой вид.
Решение задачи 3, как правило, имеет вид не просто X(x)Y(y)Z(z), а суммы $X_1(x)Y_1(y)Z_1(z)+ X_2(x)Y_2(y)Z_2(z)+X_3(x)Y_3(y)Z_3(z)+\ldots$ Тем не менее, решение задачи 3 вновь начинается с деления переменных. Это делается, чтобы не писать громоздкую сумму. Кроме того, все $X_i(x)Y_i(y)Z_i(z)$ должны удовлетворять дифуру (Лапласа). Но когда мы дойдём до граничных условий, мы должны всё-таки приравнять неоднородность к сумме $X_i(x)Y_i(y)Z_i(z)$, а не какому-то одному слагаемому.

Для простоты пока рассмотрим примеры, где φ меняется от 0 до 2π.

Это круг  , кольцо 



и отверстие – плоскость с вырезанным кругом:

Итак, пишем дифур. На этот раз он у нас упрощённый – уравнение Лапласа. Разделяем переменные, как это было у нас принято

$$\Phi(\varphi)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi(\varphi)}{\partial\varphi^2}R(r)=0$$

для λ-уравнения у нас было аналогично:

$$\Phi(\varphi)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi(\varphi)}{\partial\varphi^2}R(r)+\lambda R(r)\Phi(\varphi)=0$$

Первое и третье слагаемое объединим в одно, вынеся за скобки Φ(φ):

Поделим на R(r) * Φ(φ), домножим на r^2. Для λ-уравнения мы получили

$$\frac{r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR(r)}{dr}\right)+\lambda r^2R(r)}{R(r)}+\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}=0$$

Ну а для уравнения Лапласа

$$\frac{r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR(r)}{dr}\right)}{R(r)}+\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}=0$$

Оба слагаемых константа. Хм, с какой же начать? Конечно же, с $\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}$! Почему? Однородные ГУ, а всегда нужно начинать с переменной с однородными ГУ.

Для Ф(φ) получаем $C_n\cos(n\varphi)+D_n\sin(n\varphi)$, а отношение $\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}$ равным $-n^2$.

Значит, $\frac{r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{r}\right)}{R(r)}$ - это n^2.

$$r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{r}\right) = n^2 R$$

$$r^2R_n''(r) + rR_n'(r) - n^2R_n(r) = 0.$$

Мы получили уравнение Эйлера. Его решение

$$R_n(r) = \begin{cases} A_0 + B_0 \ln r, & n = 0, \\ A_n r^n + B_n r^{-n}, & n \neq 0. \end{cases}$$

Как мы видим, отказ от λ-уравненения в пользу уравнения Лапласа повлёк значительно более простой дифур с более простым решением. Не спешите радоваться, это задача 3, тут будет увлекательный подбор констант – тех самых Ашек и Вшек.

Колыбасова и Буткварёв любят фигурные скобки. Я предпочитаю писать сумму, так понятней:

$$R(r) = A_0 + B_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-n})$$

Теперь получим $u_n(r,\varphi)$. Для этого перемножим $R_n(r)$ и $\Phi_n(\varphi)$. Колыбасова записала это с фигурными скобками:

$$u_n(r,\varphi) = R_n(r)\Phi_n(\varphi) = \begin{cases} A_0 + B_0 \ln r, & n = 0, \\ (A_n r^n + B_n r^{-n}) \cos n\varphi, & n = 1, 2, \ldots, \\ (A_n r^n + B_n r^{-n}) \sin n\varphi, & n = -1, -2, \ldots \end{cases}$$

Я не очень люблю эти фигурные скобки, поэтому запишу вот так вот

$$u_n(r,\varphi) = R_n(r)\Phi(\varphi) = \left[A_0 + B\ln r + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n r^n + B r^{-n}\right)\right]\left(C_n\cos n\varphi + D_n \sin n\varphi\right)$$

В некотором роде фигурные скобки – способ скрыть часть констант (как мы видим, Колыбасова обошлась без записи C_n и D_n). Но зато у меня понятней.

А $u(r,\varphi)$ – это сумма всевозможных $u_n(r,\varphi)$, т.е. (тут мы ещё скобки подраскроем)

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(r,\varphi) =$$

$$= A_0 + B_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} [(A_n C_n r^n + B_n C_n r^{-n}) \cos n\varphi + (A_n D_n r^n + B_n D_n r^{-n}) \sin n\varphi].$$

Вылезло куча попарных произведений констант. Их лучше переобозначить как новые константы, чтобы проще было:

$$A_0 + B_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} [(A_n r^n + C_n r^{-n}) \cos n\varphi + (B_n r^n + D_n r^{-n}) \sin n\varphi]$$

Я не зря его поместил в рамочку – это готовое решение дифура Лапласа в полярных СК (оно годится для любых кольцевых объектов, где φ меняется от 0 до 2π), которым мы будем пользоваться на самостоялках.

Константы определяются из ГУ.
Начнём с простого случая – круга. Если у нас круг, то нам придётся занулить все Вшки. Дело в том, что и r^{-n}, и $\ln(r)$ испытывают серьёзные проблемы внутри нуля. Тогда u(,) упростится:

$$u(r,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [\, A_n r^n \cos n\varphi + B_n r^n \sin n\varphi].$$

А на границе круга у нас задана граничная функция f(φ), которая считается известной и, разумеется, периодической с периодом 2π (ну или определённой на [0..2π] и f(0)=f(2π), что то же самое).
Т.е. u(b, φ)= f(φ) (это если граничное условие 1 рода), или
$\partial u(r, \varphi)/\partial r \,|_{\text{при } r=b} = f(\varphi)$ (это если граничное условие 2 рода), или
$\alpha * u(b, \varphi) + \beta * \partial u(r, \varphi)/\partial r \,|_{\text{при } r=b} = f(\varphi)$ (это если граничное условие 3 рода).

Простой пример 1. f(φ) имеет вид 2* cos 2φ - 3*sin φ. Граничное условие 1 рода. Давайте посмотрим на вид u(r, φ). A_0, очевидно, 0. Смотрим на косинусы. Все A_n ноль, кроме A_2. Нам нужно, чтобы $A_2 * r^2$ было 2. Вспомним, что это всё на границе происходит, где r=b. Тогда $A_2 = 2/b^2$.

Аналогичная шняга с синусом. Все Вшки 0, кроме B_1. Нужно, чтобы $B_1 * r^1$ было -3. Вспоминаем, что r=b, получаем B_1=-3/b.

Записываем ответ:
$u(r,\varphi) = 2/b^2 * \cos 2\varphi - 3/b * \sin \varphi.$

Пример 2 посложнее. f(φ) имеет вид 2+ 4*cos^3 φ. Тут сложнее. Он раскладывается в 2+ cos 3φ + 3*cos φ. Как только мы её разложили на cos nφ, всё сразу стало ясно – занулятся все n-ки, кроме 0 (A0 как раз будет соответствовать константе, т.е. будет 2), 1 и 3. Таким образом, u становится равным

$$u(r,\varphi) = 2 + A_1 r * \cos\varphi + A_3 r^3 * \cos 3\varphi$$

Теперь, только после определения n-нок, смотрим, какого рода условие. Пусть 3-го, нам не повезло. Например, вот:

$$\left(u(r,\varphi) + \frac{\partial u(r,\varphi)}{\partial r}\right)|_{r=b} = f(\varphi) = 2 + 3\cos\varphi + \cos 3\varphi$$

Замечание. Условие третьего рода αu+β*∂u/∂r=f() можно поделить на α, переопределив β:= β/α и f():=f()/α. Тогда условие перепишется без альфы:
u+β*∂u/∂r=f()
Что будет попроще.
А в каких-то задачах ММФ лучше сделать единицей коэф перед производной:
α*u+∂u/∂r=f()
Энивей теперь вы понимаете, что в условиях 3 рода можно избавиться от любой из двух греческих букв и вопроса «куда делась альфАААААА» у вас теперь не возникает.

Нам потребуется тогда производная u по r:

$$\frac{\partial u(r,\varphi)}{\partial r} = A_1 * \cos\varphi + 3A_3 r^2 * \cos 3\varphi$$

Подставим u и её частную производную в условие 3 рода:

$$2 + A_1 z\cos\varphi + A_3 z^3 \cos 3\varphi + \beta\left(A_1\cos\varphi + 3A_3 z^2 \cos 3\varphi\right) =$$

$$= 2 + 3\cos\varphi + \cos 3\varphi$$

Двойки сократятся – так и должно быть, значит, мы подобрали A_0 верно. Приравниваем константы и коэфы при cos φ, cos 3φ, попутно вспоминая, что это граничное условие выполняется на границе, а значит, нужно подставить вместо r b:

$$\begin{cases} A_1 b + \beta A_1 = 3 & \Rightarrow \quad A_1 = \dfrac{3}{b+\beta} \\ A_3 b^3 + 3\beta A_3 b^2 = 1 & \Rightarrow \quad A_3 = \dfrac{1}{b^3 + 3\beta^2 b} \end{cases}$$

Собсна, победа.

Более сложный случай

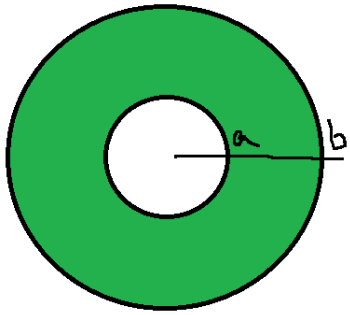
Что делать, если неочевидно, как представить f(φ) в виде суммы cos nφ и sin nφ? В этом случае придётся раскладывать f(φ) в ряд Фурье и считать коэфы A_n и B_n по Бутузовским формулам.

$$f(\varphi) = \frac{E_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (E_n \cos n\varphi + F_n \sin n\varphi),$$

$$E_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\cos n\varphi \, d\varphi, \qquad F_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\sin n\varphi \, d\varphi.$$

Посчитали Ешки и Fки. Теперь надо подставить их в разложение f() в ряд и понять, какие n-ки занулится.
Мне достаточно сложно придумать f(φ), для которой пришлось бы раскладывать в ряд Фурье, а если бы и придумал, то выкладки бы зашкалили (поэтому конкретной задачи не будет, простите).

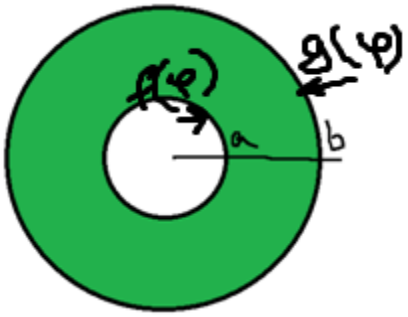
Ещё один пример: что будет, если у нас не круг, а кольцо?



Для начала, у нас не занулятся Вшки и будут ln(r) с r^{-n}, и нам придётся вернуться к громоздкой формуле

$$A_0 + B_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} [(A_n r^n + C_n r^{-n}) \cos n\varphi + (B_n r^n + D_n r^{-n}) \sin n\varphi]$$

А далее всё то же самое: раскладываем f(φ)… ой, а их теперь у нас будет двое: f(φ) для внутренней стороны кольца и g(φ) для внешней по cos nφ и sin nφ.



Всё логично: в два раза больше коэффициентов, но и в два раза больше граничных условий.
Давайте для примера f(φ)=cos φ – cos 4φ, g(φ)=cos 4φ – 5*sin φ, и там, и там условия первого рода, потому что мне лень производную считать (а вы на ср подсчитаете, потому что Буткарёв наверняка же условия 3 рода даст).

$$A_0 + B\ln a + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(A_n a^n + C_n a^{-n}\right)\cos n\varphi + \left(B_n a^n + D_n a^{-n}\right)\sin n\varphi\right] = f(\varphi) = \cos\varphi - \cos 4\varphi$$

$$A_0 + B\ln b + \sum\left[\left(A_n b^n + C_n b^{-n}\right)\cos n\varphi + \left(B_n b^n + D_n b^{-n}\right)\sin n\varphi\right] = g(\varphi) = \cos 4\varphi + \sin\varphi$$

А далее нас ждёт увлекательное (нет) страшное (да) решение системы.
Для первого уравнения

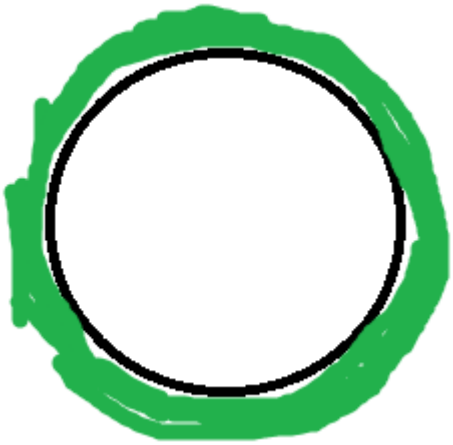
$$\begin{cases} A_4 a^4 + C_4 a^{-4} = -1 \\ A_1 a^1 + C_1 a^{-1} = 1 \\ B_4 a^4 + D_4 a^{-4} = 0 \\ B_1 a^1 + D_1 a^{-1} = 0 \end{cases}$$

А для второго

$$\begin{cases} A_4 b^4 + C_4 b^{-4} = 1 \\ A_1 b^1 + C_1 b^{-1} = 0 \\ B_4 b^4 + D_4 b^{-4} = 0 \\ B_1 b^1 + D_1 b^{-1} = -5 \end{cases}$$

Система из 8 уравнений для 8 неизвестных: A1, A4, B1, B4, C1, C4,D1, D4. Кек. Она однозначно решается, все коэфы однозначно находятся и подставляются.

Последний пример про отверстие: когда r>b.



Тут у нас возникнет проблема: мы не видим причин отказываться ни от одной из функций:
Константа
ln(r)
r^n
r^{-n}
А граничных условий не хватает – оно всего одно.
Колыбасова и Букварёв утверждают, что физический смысл u имеет, лишь когда она ограничена на бесконечности (т.н. условие регулярности). Т.е. нам надо будет зарубить ln(r) и r^n. Останутся все Вшки и A_0. Ну а далее всё аналогично кругу.